PART3　必要条件と十分条件，条件の否定

例題

(1)　次の条件 p は条件 q であるための何条件であるか。最も適するものを(ア)~(エ)から選べ。ただし，x，y は実数とする。

(i)　p：$x=3$　　q：$x^2-4x+3=0$

(ii)　p：△ABC が直角三角形　　q：$\angle A=90°$

(iii)　p：$xy=0$　　q：x，y のうち少なくとも 1 つは 0

(iv)　p：$x>0$　　q：$|x|>1$

(ア)　必要十分条件である　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(2)　次の条件の否定を求めよ。ただし x，y は実数，n は自然数とする。

(i)　$x=1$　　(ii)　$1<x\leqq 2$

(iii)　$x>0$ または $y\leqq 2$　　(iv)　n は奇数または 5 の倍数

Point Pickup

練習

(1)　次の条件 p は条件 q であるための何条件であるか。最も適するものを(ア)~(エ)から選べ。ただし，x，y は実数とする。

(i)　p：$x \fallingdotseq 0$　　　q：$x^2-3x+2=0$

(ii)　p：四角形 ABCD が正方形　　　q：四角形 ABCD が長方形

(iii)　p：$x=1$　　　q：$xy=1$

(iv)　p：x が 4 の倍数 かつ 6 の倍数　　　q：x が 24 の倍数

(ア)　必要十分条件である　　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(2)　次の条件の否定を求めよ。ただし x，y は実数，m，n は自然数とする。

(i)　$x \leqq 5$ または $y=2$　　　(ii)　m，n はともに 3 の倍数

第 4 講　PART3　確認問題

1 次の［ア］に最も適するものを①～④から選べ。ただし，x は実数とする。

下の条件 p は条件 q であるための［ア］。

$p : x = \pm 5$　　　$q : x^2 - 25 = 0$

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

2 次の［イ］に最も適するものを①～④から選べ。

下の条件 p は条件 q であるための［イ］。

p：四角形 ABCD がひし形
q：四角形 ABCD が平行四辺形

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

3 次の［ウ］に最も適するものを①～④から選べ。ただし, x, y は実数とする。

下の条件 p は条件 q であるための［ウ］。

$p : x = -1$　　　$q : xy = -1$

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

4 次の [エ] に最も適するものを①～④から選べ。ただし，x は自然数とする。

下の条件 p は条件 q であるための [エ]。

p：x が 2 の倍数　かつ　3 の倍数

q：x が 12 の倍数

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが十分条件ではない

③ 十分条件であるが必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

5 次の [オ] に最も適するものを①～④から選べ。ただし，x，y は実数とする。

下の条件の否定は [オ]。

$x \geqq -2$　かつ　$y > 3$

① $x \leqq -2$　かつ　$y < 3$

② $x < -2$　かつ　$y \leqq 3$

③ $x \leqq -2$　または　$y < 3$

④ $x < -2$　または　$y \leqq 3$

6 次の [カ] に最も適するものを①～④から選べ。ただし，m，n は自然数とする。

下の条件の否定は [カ]。

m，n の少なくとも一方は 5 の倍数

① m，n はともに 5 の倍数

② m，n はともに 5 の倍数でない

③ m，n の少なくとも一方は 5 の倍数

④ m，n の少なくとも一方は 5 の倍数でない

PART3　必要条件と十分条件，条件の否定

例題

(1)　次の条件 p は条件 q であるための何条件であるか。最も適するものを(ア)～(エ)から選べ。ただし，x，y は実数とする。

(i)　$p：x=3$　　$q：x^2-4x+3=0$

(ii)　p：△ABC が直角三角形　　$q：\angle A=90°$

(iii)　$p：xy=0$　　$q：x$，y のうち少なくとも１つは０

(iv)　$p：x>0$　　$q：|x|>1$

(ア)　必要十分条件である　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(2)　次の条件の否定を求めよ。ただし x，y は実数，n は自然数とする。

(i)　$x=1$　　(ii)　$1<x\leqq 2$

(iii)　$x>0$ または $y\leqq 2$　　(iv)　n は奇数または５の倍数

(1)(i)　$x^2-4x+3=0$ より $(x-1)(x-3)=0$　　$x=1$，3

$p\Rightarrow q$ は真

$q\Rightarrow p$ は偽(反例 $x=1$)

したがって　(ウ)

(ii)　$p\Rightarrow q$ は偽(反例 $\angle A=30°$，$\angle B=90°$，$\angle C=60°$)

$q\Rightarrow p$ は真

したがって　(イ)

(iii)　$xy=0$ より $x=0$ または $y=0$

よって p と q は同値である。したがって　(ア)

(iv)　$p\Rightarrow q$ は偽(反例　$x=\dfrac{1}{2}$)

$q\Rightarrow p$ は偽(反例　$x=-2$)

したがって　(エ)

(2)(i)　$x\neq 1$

(ii)　$x\leqq 1$ または $2<x$　($x\leqq 1$，$2<x$)

(iii)　$x\leqq 0$ かつ $y>2$

(iv)　n は偶数かつ５の倍数でない

練習

(1)　次の条件 p は条件 q であるための何条件であるか。最も適するものを(ア)～(エ)から選べ。ただし，x，y は実数とする。

(i)　p：$x \neq 0$　　q：$x^2-3x+2=0$

(ii)　p：四角形 ABCD が正方形　　q：四角形 ABCD が長方形

(iii)　p：$x=1$　　q：$xy=1$

(iv)　p：x が 4 の倍数 かつ 6 の倍数　　q：x が 24 の倍数

(ア)　必要十分条件である　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(2)　次の条件の否定を求めよ。ただし x，y は実数，m，n は自然数とする。

(i)　$x \leqq 5$ または $y=2$　　(ii)　m，n はともに 3 の倍数

(1)(i)　$x \neq 0$ より，$x=0$ 以外のすべての実数

$x^2-3x+2=0$ より $x=1$ または $x=2$

$p \Rightarrow q$ は偽（反例 $x=3$）

$q \Rightarrow p$ は真

したがって　(イ)

(ii)　$p \Rightarrow q$ は明らかに真

$q \Rightarrow p$ は偽（反例 AB＝CD＝1 かつ BC＝DA＝2）

したがって　(ウ)

(iii)　$p \Rightarrow q$ は偽（反例 $x=1$，$y=2$）

$q \Rightarrow p$ は偽（反例 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$）

したがって　(エ)

(iv)　x が 4 の倍数かつ 6 の倍数のとき，x は 12 の倍数である

$p \Rightarrow q$ は偽（反例 $x=12$）

$q \Rightarrow p$ は真

したがって　(イ)

(2)(i)　$x>5$ かつ $y \neq 2$

(ii)　m，n の少なくとも一方は 3 の倍数でない

第4講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

$x^2-25=0$　より　$x=\pm 5$

よって　$p \Longrightarrow q$ は真

$q \Longrightarrow p$ は真

したがって，条件 p は条件 q であるための**必要十分条件である。**[A]

> [A]　必要条件・十分条件
> 命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，
> p は q であるための十分条件
> q は p であるための必要条件
> という。
> 命題 $p \Longleftrightarrow q$ が成り立つとき，
> p は q であるための必要十分条件
> という。

2

[正解] イ：③

[解説]

$p \Longrightarrow q$ は真

$q \Longrightarrow p$ は偽

（反例　$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=2$　かつ　$\mathrm{BC}=\mathrm{DA}=3$）

したがって，条件 p は条件 q であるための**十分条件であるが必要条件ではない。**[B]

> [B]　必要条件・十分条件
> 命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，
> p は q であるための十分条件
> q は p であるための必要条件
> という。
> 命題 $p \Longleftrightarrow q$ が成り立つとき，
> p は q であるための必要十分条件
> という。

3

[正解] ウ：④

[解説]

$p \Longrightarrow q$ は偽（反例　$x=-1$，$y=0$）

$q \Longrightarrow p$ は偽（反例　$x=1$，$y=-1$）

したがって，条件 p は条件 q であるための**必要条件でも十分条件でもない。**[C]

> [C]　必要条件・十分条件
> $p \Longrightarrow q$，$q \Longrightarrow p$ がともに偽ならば，
> p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

4 [正解] エ：②

[解説]

x が 2 の倍数　かつ　3 の倍数のとき，x は 6 の倍数

よって　$p \Longrightarrow q$ は偽（反例　$x=6$）

$q \Longrightarrow p$ は真

したがって，条件 p は条件 q であるための**必要条件であるが十分条件ではない。** [D]

> [D]　必要条件・十分条件
> 命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，
> p は q であるための十分条件
> q は p であるための必要条件
> という。

5 [正解] オ：④

[解説]

$\overline{p \text{かつ} q} \iff \overline{p}$ または $\overline{q}$ [E]

したがって，「$x \geqq -2$　かつ　$y>3$」の否定は

「$\boldsymbol{x<-2}$　**または**　$\boldsymbol{y \leqq 3}$」

> [E]　「p かつ q」の否定
> $\overline{p \text{かつ} q} \iff \overline{p}$ または $\overline{q}$

6 [正解] カ：②

[解説]

$\overline{p \text{または} q} \iff \overline{p}$ かつ $\overline{q}$ [F]

したがって，「m，n の少なくとも一方は 5 の倍数」の否定は「$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ **はともに 5 の倍数でない**」

> [F]　「p または q」の否定
> $\overline{p \text{または} q} \iff \overline{p}$ かつ $\overline{q}$